



**You have downloaded a document from  
RE-BUS  
repository of the University of Silesia in Katowice**

**Title:** Another proof that a finite integral domain is a field

**Author:** Bronisława Błaszczyk

**Citation style:** Błaszczyk Bronisława. (1972). Another proof that a finite integral domain is a field. "Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Prace Matematyczne" (Nr 2 (1972), s. 11)



Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Bez utworów zależnych Polska - Licencja ta zezwala na rozpowszechnianie, przedstawianie i wykonywanie utworu jedynie w celach niekomercyjnych oraz pod warunkiem zachowania go w oryginalnej postaci (nie tworzenia utworów zależnych).



UNIwersYTET ŚLĄSKI  
W KATOWICACH



Biblioteka  
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki  
i Szkolnictwa Wyższego

BRONISŁAWA BŁASZCZYK

## Another proof that a finite integral domain is a field

In many books we can find proofs of the theorem on finite integral domains and all proofs run exactly as, for example, in the BIRKHOFF and McLANE'S Survey of Modern Algebra (ch. II, §3).

It may be of interest to prove the theorem in the following quite different manner.

Let  $R$  be a finite integral domain (i.e. a finite commutative ring without zero divisors) and let  $R^*$  be the set of non-zero elements of  $R$ . If  $a \in R^*$ , then  $a, a^2, \dots$ , all belong to  $R^*$  (there are no zero divisors in  $R$ ) and because of the finiteness of  $R$  we get  $a^p = a^q$  for some positive integers  $p, q, p > q$ . We shall prove that  $a^{p-q}$  is the unit of the ring  $R$ .

In fact, if  $b \in R$ , we have

$$ba^p = ba^q, \quad ba^p - ba^q = 0, \quad (ba^{p-q} - b)a^q = 0.$$

But  $a^q \neq 0$ , so  $ba^{p-q} - b = 0$ , i.e.  $a^{p-q}$  is the unit of the ring  $R$ .

Now observe that for every  $a \in R^*$  there is an inverse element in  $R^*$ . Indeed, if  $a^p = a^q, p > q$ , then  $a^{p-q}$  is the unit and if  $p-q = 1$  there is nothing to prove, since  $a$  is the inverse for itself; if, on the other hand,  $p-q > 1$ , then

$$a \cdot a^{p-q-1} = a^{p-q},$$

i. e.  $a^{p-q-1}$  is the inverse of  $a$ .

Thus the ring  $R$  is a field.

BRONISŁAWA BŁASZCZYK

NOWY DOWÓD TWIERDZENIA, ŻE SKOŃCZONY PIERŚCIEŃ CAŁKOWITY  
JEST CIAŁEM.

Streszczenie

Podano nowy dowód twierdzenia wymienionego w tytule

Oddano do Redakcji 7. 3. 1970